



# Vurdering i matematikk etter LK20

Resonnering og argumentasjon

Samling 2



**MATEMATIKKSENTERET**

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



**NTNU**

Kunnskap for en bedre verden

# Velkommen til en god digital fagdag

- Én deltaker per innlogging.
- Skriv navn, skole og kommune
- Slå på mikrofonen når du skal prate.
- Still gjerne spørsmål i chat'en!
- Vi ønsker i utgangspunktet at alle skal ha kamera på.
- Delta aktivt i breakout-room.



# Målet med tiltaket

---

Lærere skal utvikle en god forståelse av vurdering i det nye læreplanverket LK20, og de skal kunne gjennomføre en vurdering som er i tråd med intensjonene i forskrift og læreplan.

---

Skolene skal utvikle felles forståelse av vurdering i læreplanene og implementering av dem.

---

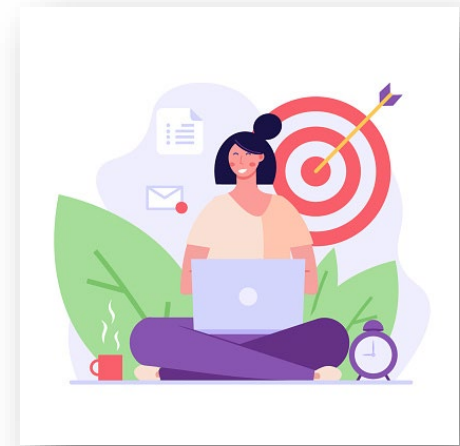
Skoleeierne skal støtte skolene i dette arbeidet.



# Mål for dagen

Målet for samlingen er at deltakerne skal

- utvikle felles forståelse av sentrale begrep i læreplan knyttet til vurdering
- få en dypere innsikt i hva som ligger i kjerneelementet resonnement og argumentasjon og hvilken betydning det vil få for vurderingsarbeidet i faget



# Om faget

*Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter og kan ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet.*

Udir, LK20



**MATEMATIKKSENTERET**

# Resonnering og argumentasjon

*Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkje. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem.*

*Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at dei er gyldige.*

Udir, LK20



# Utvikle felles forståelse av begrep

Hva ligger i begrepene

- resonnering
- argumentasjon



# Underveisvurdering

*Elevene viser og utvikler kompetanse i matematikk når de **resonnerer** over og **argumenterer** for framgangsmåter og løsninger (LK20)*





# Planlegge ei arbeidsøkt

- Mål for arbeidsøkta
- Hvordan vurdere målet?
- Valg av aktivitet/oppgave
  - Hvilke muligheter ligger i oppgaven?
  - Hvordan tror du elevene vil resonnerer?
  - Hvordan tror du elevene vil argumentere?



# Løs dagens oppgave

Hensikten med at dere skal løse oppgaven

- Lære mer om vurdering knyttet til elevenes kompetanse
- Forutse elevsvar som forberedelse til undervisning og formativ vurdering
- Tenke gjennom hvordan du kan støtte elevene i arbeidet. Hvilke spørsmål bør du stille?



Til høyre ser du et hundrekart. I hundrekartet er tre tall markert.

Lydia har funnet et mønster i hundrekartet.



*Summen blir alltid tre ganger det midterste tallet, så lenge tallene er markert etter samme mønster!*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Argumenter for om påstanden til Lydia stemmer eller ikke.



# Grupper (Jamboard – 20 min)

- Forutse elevsvar
- Vis eksempler:
  - Hvordan vil elevene dine resonnere?
  - Hvordan vil elevene dine argumentere?
- Hva vil være gode argumenter?



# Lydias påstand - eksempler fra Jamboard

Til højre ser du et hundrekart. I hundrekartet er tre tall markeret.

Lydia har fundet et mønster i hundrekartet.

Summen blir alltid tre ganger det midterste tallet, så lenge tallene er markert etter samme mønster!



Argumenter for om påstanden til Lydia stemmer eller ikke.

Hvis du plusser sammen de tre tallene og deler på tre får du tallet i midten.

Hvis du tar en ener og en tier fra det største tallet og gir til det minste, blir alle tallene til det tallet i midten.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$$(n-11) + n + (n+11) = 3n$$

$$n - 11 + n + n + 11 = 3n$$

$$3n = 3n$$

Tallene øker med 11 for hvert tall. Om jeg ser på det midterste tallet, f.eks 24 vil det neste tallet være 11 større og det forrige tallet være 11 mindre. Da blir også gjennomsnittet av de tre tallene det samme som det midterste, altså 24. Summen av de tre tallene må derfor bli 3 ganger så stort som det midterste

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$$71 + 82 + 93 = 246$$

$$3 * 82 = 246$$

$$43 + 54 + 65 = 162$$

$$3 * 54 = 162$$

$$18 + 29 + 40 = 87$$

$$3 * 29 = 87$$

stemmer eller ikke.

Eksempel 1:  
 $13 + 24 + 35 = 72$  ( $3 * 24 = 72$ )  
 $1 + 12 + 23 = 36$  ( $3 * 12 = 36$ )  
 $58 + 69 + 80 = 207$  ( $3 * 69 = 207$ )

Eksempel 2:  
 $13 + 24 + 35 = 72$  ( $13 * 3 = 39$ )

Dette stemmer ikke.

Dette stemmer.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
13		12		44		26		17		21		
24	72	23	69	55	165	35	105	27	81	22	66	
35		34		66		44		37		23		
72		69		165		105		81		66		
Bevis for at Lydias påstand stemmer			Stemmer også for andre retninger									

A	B	C	D	E	F	G	H
13		12		44		26	
24	=A2*3	23	=C2*3	55	=E2*3	35	=G2*3
35		34		66		44	
=SUMMER(A1:A3)		=SUMMER(C1:C3)		=SUMMER(E1:E3)		=SUMMER(G1:G3)	=SUM
Bevis for at Lydias påstand			Stemmer også for andre r				

# Oppsummering (10-15 min)

- Hva snakka dere om?
  - Forutse elevsvar
  - Vis eksempler:
    - Hvordan vil elevene dine resonnere?
    - Hvordan vil elevene dine argumentere?
  - Hva vil være gode argumenter?



# Resonnering og argumentasjon

Enge og Valenta 2011

Når man begrunner og argumenterer for en strategi, må man skille mellom

- selve strategien, dvs HVA man har gjort
- argumentasjonen, dvs HVORDAN man vet at det går an å tenke slik, HVORFOR man kan gjøre det.



# Måter å argumentere for gyldigheten av generelle løsninger

Enge og Valenta (2011)

1. *Referere til autoriteter*
2. *Prøve ut noen konkrete eksempler*
3. *Bruke et representasjonsbevis*
4. *Bruke algebraisk notasjon og bygge på egenskaper som allerede er bevist*

*Elevane viser og utviklar òg kompetanse når dei utforskar og generaliserer matematiske samanhengar og strukturar gjennom algebra og formålstenlege representasjonar.*

*Undervegsvurdering 10. trinn, LK20*





# Det bare er slik!

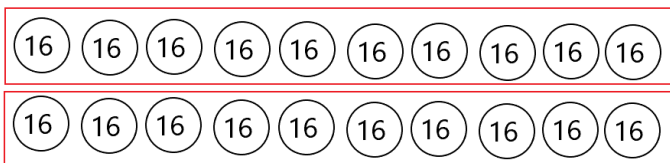
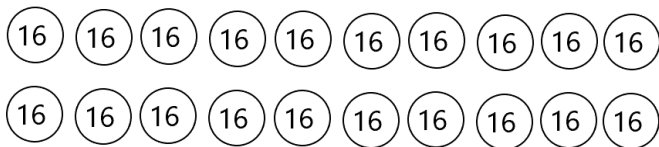
«*Flytte null*»-strategi:

$$20 \cdot 16 = 2 \cdot 160$$

1. Læreren har sagt det/Det står i boka.
2. Sjekker med eksempler:  
 $20 \cdot 16 = 320$   
 $2 \cdot 160 = 320$   
  
 $30 \cdot 15 = 450$   
 $3 \cdot 150 = 450$

# Generaliserbare argumenter

## 3. Representasjonsbevis



## 4. Algebraisk

Bruker assosiativ egenskap:

$$20 \cdot 16 = (2 \cdot 10) \cdot 16 = 2 \cdot (10 \cdot 16) = 2 \cdot 160$$

Tall som består av bare tiere kan skrives som  $a \cdot 10$ .

Dette tallet multipliseres med et annet tall,  $c$ .

«Å flytte null» blir et spesialtilfelle av den assosiative egenskapen:  $(a \cdot 10) \cdot c = a \cdot (10 \cdot c)$

Assosiative egenskap til multiplikasjon:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , der  $a$ ,  $b$  og  $c$  er tre vilkårlige tall.

# Representasjonsbevis

Argumentasjon som bygger på en tegning, bruk av konkrete eller en regnefortelling kalles for et representasjonsbevis hvis representasjonen (det man viser med tegningen, konkrete eller regnefortellingen) oppfyller følgende kriterier:

1. Betydning av den involverte operasjonen er representert tydelig i tegningen, konkrete eller regnehistorien.
2. Representasjonen kan bli generalisert – tilpasset til å gjelde for en hel klasse eksempler (for eksempel alle hele tall)
3. Strategien det argumenteres for kommer tydelig frem i representasjonen og konklusjonen (om strategien virker eller ikke) følger fra representasjonen.

Eksemplet med elevene og pengene:

Oppfyller argumentasjonen vi brukte i  $(20 \cdot 16)$  for å vise at  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  kravene for et representasjonsbevis?




# Eksemplet med elevene og penger – er det et representasjonsbevis?

Kriterier:

1. Betydning av den involverte operasjonen er representert tydelig i tegningen, konkrete eller regnehistorien.
  2. Representasjonen kan bli generalisert – tilpasset til å gjelde for en hel klasse eksempler
  3. Strategien det argumenteres for kommer tydelig frem i representasjonen og konklusjonen følger fra representasjonen.
1. **Starter med et bilde** der betydning av **multiplikasjon** er fremhevet. «Elever med samme antall kronebeløp» representerer multiplikasjonsstykket.
  2. Representasjonen tar utgangspunkt i de gitte tallene, 20 elever med 16 kroner hver, men **kan tilpasses til å gjelde hvilke som helst positive heltall** der et av tallene består av bare tiere (0 på enerplassen).
  3. **Omgruppering** – ti elever i ei gruppe, ingenting er lagt til, ingenting er tatt bort – **fører tydelig til konklusjonen** at strategien «å flytte 0» holder i alle overnevnte regnestykker.

# Reelle elevsvar (20 min)

Vurder elevsvar og plasser hvert elevsvar langs ei utviklingslinje

- 
- |  |  |   |
|--|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- prøver ut noen konkrete eksempler</li><li>- beskriver hva han har gjort (strategi)</li><li>- lite refleksjon rundt løsning(er)</li><li>- refererer til autoriteter</li></ul> |  | <ul style="list-style-type: none"><li>- bruker former for representasjonsbevis</li><li>- forklarer hvorfor han kan gjøre det</li><li>- forklarer hvordan han vet at han kan gjøre det</li><li>- uttrykker sammenhenger algebraisk</li></ul> |
|--|--|---|



# Oppsummering

- Hva har diskusjonen på gruppene gått ut på?
- Kommentarer/innspill på det å bruke “utviklingslinje” i vurderingsarbeid?



# Utviklingslinje

- Inspirasjon fra forskning
- Eget når én (eller få) kompetanser skal vurderes
- Glidende overganger og ikke oppstykkede nivåer
- Hvor eleven befinner seg i en læringsprosess



# Kjennetegn på måloppnåelse

- The problem is that we cannot nuance language well enough to communicate differences among that many columns.
- The bigger problem is that we think we can.

Liljedahl, 2021

HOVEDOMRÅDE – Tall og algebra:			
Kompetansemål: eleven skal kunne	grad	Måloppnåelse / vurderingskriterier - eleven kan:	karakter
1. sammenligne og regne om mellom hele tall, desimaltall, brøker, prosent, promille og tall på standardform, uttrykke slike tall på varierte måter og vurdere i hvilke situasjoner ulike representasjoner er formålstjenlige	Høy	Vurderer metodevalg og bruker hensiktsmessige strategier. Kan regne med promille og regne med tall på standardform. Kan vurdere hensikten rundt bruk av standardform.	6, 5
	Middels	Mestrer sammenhengen mellom desimaltall, brøk og prosent, og kan nyttiggjøre seg dette. Kan regne med promille, og kan til en viss grad skrive på standardform.	4, 3
	Lav	Kan enkel bruk av de fire regneartene, desimaltall, brøk og prosent	2, 1
2. regne med brøk, utføre divisjon av brøker og forenkle brøkuttrykk	Høy	Kan regne, dividere og forenkle store brøkuttrykk med tall og bokstaver	6, 5
	Middels	Kan bruke de fire regneartene i regning med brøk. Kan forkorte enkle uttrykk og finne fellesnevner.	4, 3
	Lav	Kan regne enkle brøkuttrykk.	2, 1
3. bruke faktorer, potenser, kvadratrøtter og primtall i beregninger	Høy	Kan gjøre nytte av faktorisering og primtall i ulike sammensatte beregninger. Mestrer bruk av kvadratroter i ulike sammenhenger. Behersker ulike regnearter med potensuttrykk. Kan bedømme hvor det er hensiktsmessig å bruke potensform.	6, 5
	Middels	Kan faktorisere og gjøre rede for primtall og bruke dette i ulike sammenhenger. Kan regne med potenser og gjøre bruk av kvadratroter i ulikesammenhenger.	4, 3
	Lav	Kan i noen grad bruke og forklare hva primtall og kvadratroter er. Kjenner til tall på potensform.	2, 1
4. utvikle, bruke og gjøre greie for ulike metoder i hoderegning, overslagsregning og skriftlig regning med de fire regneartene	Høy	Kan reflektere og analysere omkring hensiktsmessige strategier og metoder i hode- og overslagsregning. Behersker de fire regneartene med alle typer tall uten tekniske hjelpemidler.	6, 5
	Middels	Kan hensiktsmessige strategier og metoder i hode- og overslagsregning. Kan bruke de fire regneartene uten tekniske hjelpemidler	4, 3
	Lav	Klarer å benytte seg av noen metoder i hode- og overslagsregning. Kan bruke de fire regneartene med enkle tall uten tekniske hjelpemidler.	2, 1
5. behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knytte uttrykkene til praktiske situasjoner, regne med formler, parenteser og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningene	Høy	Behersker regning med kompliserte algebrauttrykk. Kan se sammenhengen mellom algebrauttrykk og praktiske situasjoner.	6, 5
	Middels	Mestrer sammensatte uttrykk hvor det inngår multiplikasjon. Kan multiplisere og løse opp parenteser med ulik fortegn.	4, 3
	Lav	Klarer å trekke sammen enkle algebrauttrykk. Kjenner til fortegnreglene.	2, 1





# Kjennetegn på måloppnåelse – matematikk 10. trinn

<b>Lav kompetanse i faget, karakter 2</b>	<b>God kompetanse i faget, karakter 4</b>	<b>Framifrå kompetanse i faget, karakter 6</b>
Eleven presenterer deler av egne fremgangsmåter og løsninger.	Eleven presenterer og forklarer egne og andres fremgangsmåter og løsninger.	Eleven presenterer, forklarer og argumenterer for egne og andres fremgangsmåter og løsninger.

Udir.no



**MATEMATIKKSENTERET**

# ARGUMENTASJON



Gruppe A

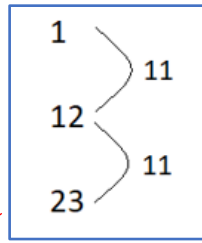
Gruppe E

Gruppe C

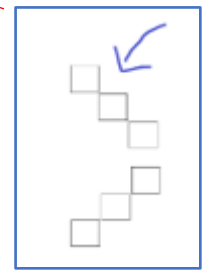
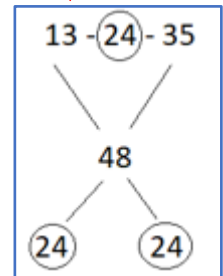
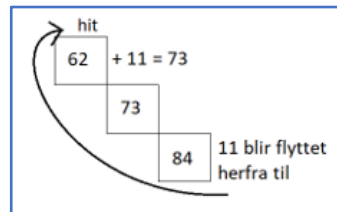
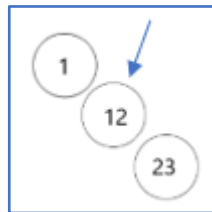
Gruppe B

Gruppe F

Gruppe D

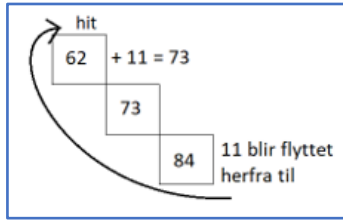


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

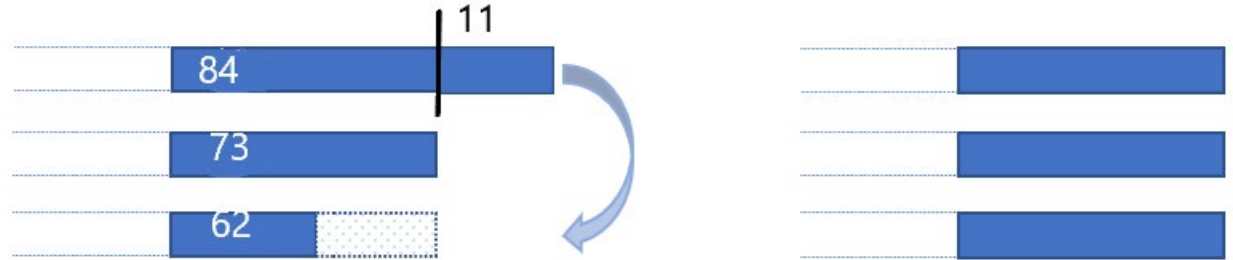


# Fra det spesielle til det generelle

Gruppe F



Representasjonsbevis?



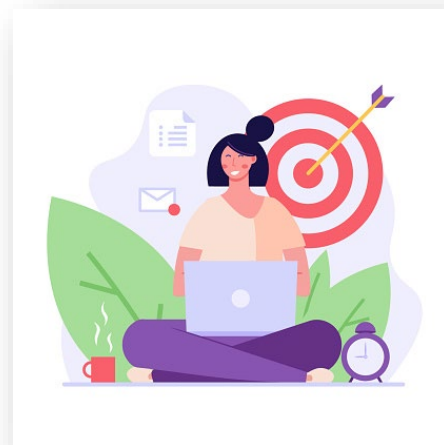


# Oppsummering av dagen

# Mål for dagen

Målet for samlingen er at deltakerne skal

- utvikle felles forståelse av sentrale begrep i læreplan knyttet til vurdering
- få en dypere innsikt i hva som ligger i kjerneelementet resonnering og argumentasjon og hvilken betydning det vil få for vurderingsarbeidet i faget



# Neste gang

I september skal vi møtes fysisk!

Da skal vi jobbe med temaet:

God matematikkundervisning og vurdering  
– to sider av samme sak





Evaluering av dagen



# Takk for oss

Besøk oss gjerne på [matematikksenteret.no](https://matematikksenteret.no)

## MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE – ET SAMSPILL MELLOM PRAKSIS, FORSKNING OG UTVIKLING



Læringsressurser for barnehage og skole. Ressursene for skole er tagget etter kompetansemål.



Varierte oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning. Ressursene er koblet til kompetansemål i læreplanen og intensjonene i rammeplan for barnehagen.



Spill, oppgaver, aktiviteter og fakta om matematikk.



Oppgaver for samarbeid, problemløsning og matematisk diskusjon.



Samleside for GeoGebra. Undervisningsopplegg, digitale kurs og andre læringsressurser.



Vurderingsverktøy for kartlegging av talloppfatning og tallforståelse. Inkluderer håndbok med veiledningsmateriell.